Spin 1/2系純粋状態ファミリーの漸近推定理論(第5回『非平衡系の統計物理』シンポジウム,研究会報告)

林, 正人

Spin 1/2 系 純粋状態ファミリーの漸近推定理論

林 正人 [1]　　京都大学 理学研究科 数学教室

Abstract

量子力学では，様々な意味で不確定性や不確定性関係が議論される．しかし，測定による不確定性を厳密に評価した研究は数少ない．量子推定理論は，推定誤差の視点から量子力学の持つ不確定性を厳密に捉えるための枠組みと言ってもよい．本稿ではSpin 1/2 系 の純粋状態に的を絞って，このような視点から議論する．

1 序章

近年，光通信に関する関心の高まりと関連して，量子力学によって記述される通信システムの受信過程の最適化に関する研究の必要性が増しつつある [2]．本研究テーマである量子状態の推定問題は，この受信過程の最適化の研究として，1960年代後半から70年代にかけて，Holevo ら旧ソ連の数学者，および Helstrom, Yuen らアメリカの応用物理学者によって定式化された [4,5]．量子推定理論の目的は，未知の状態を推定するにはどのような観測が適切か調べることにある．初期の特筆すべき成果としては，Yuen らによる背景熱ノイズ中のコヒーレント光の複素振幅の推定 [6]，及びそれを一般化した Holevo による量子ガウス状態の期待値パラメータの推定があげられる [5]．初期の量子推定理論は光通信の受信過程の最適化との関連で発展したことから，未知の状態の1つのサンプルに対する測定の誤差評価に重点が置かれていた．この結果，漸近的推定理論としての考察を欠くことになった．1980年代に入ると，量子推定理論に関する研究は停滞し，この分野の研究者すらいない状況がしばらく続いたが，近年になって欧米で状態推定 (state estimation) に関する話題に関心が集まりつつある．

基本的に，未知の量子状態の1つのサンプルから未知の量子状態を推定することは不可能である [17]．従って，未知の量子状態の精度の高い推定には，サンプルを複数準備することはもはや避けられない．特に，量子状態から何らかの情報を引き出す行為は（単なるオブザーバブルの測定や連続測定を含む.）いわゆる一般化測定により記述されることが知られている§2.1 [4,5,16]．これらの基本的事実に基づいて，状態推定に関する様々な問題設定が提唱されつつある．

このような問題設定の下，欧米で注目を集めているものに，次のような研究が挙げられる．それは，主に Tomography と呼ばれ，パラメトライズされたファミリーを仮定せず，未知の量子状態に対応する，密度演算子を推定する問題を扱う [18,19]．この定式化の下では量子系の表現空間が有限次元であるときはパラメータ推定に帰着できるが，無限次元であるときにはパラメータ推定に帰着できない．量子光学と関連して，量子化された輻射場でのこの種の研究が盛んに行われ，ホモダイン測定や光子数測定を用いる手法が提案されている．これらの研究では，主に個々のサンプルに対して適当な測定を行い，その後

[1] e-mail address: masahito@kusm.kyoto-u.ac.jp

に適切なデータ処理を行って，状態を推定する方法が提案されている．ただ，数学的に厳密な誤差評価がなされていない．

一方，日本では1980年代末から現代にかけて，長岡，藤原，松本らにより1970年代の一連の量子推定理論の研究が再評価され，統計学の視点から，より深く掘り下げた研究がなされた．これらの研究の動機の1つに，量子力学の持つ不確定性を統計学の視点から厳密に定式化しようとの試みが挙げられる．これらの研究は古典統計学でのパラメータ推定に対応する研究であるとも言える[8,9,10,11]．欧米で盛んに研究されている Tomography に比べると，数学的に厳密で数理統計学(統計力学ではない)の用語を用いた定式化となっているため，物理学者にはなじみにくい定式化となっている．1970年代の研究と異なり，サンプルを複数準備した場合の漸近的な誤差評価を試みた研究もなされている[1,12]．このような視点で書かれた量子推定理論の入門書に藤原による参考文献[21]がある．その他，広田によって書かれた参考文献[22]もこの分野に関する数少ない日本語文献である．このように，量子推定理論の流れを概説したが，散発的に研究が進むこともこの分野の性質である．従って，先の流れに含まれない優れた研究も少なくなく，この分野全体を余すこと無く簡単に紹介することは容易ではない．

本稿では，これらの統計学の視点から掘り下げられてきた量子推定理論の流れを受けて，Spin 1/2 系の未知の純粋状態の推定問題を扱う．特に本稿では，未知の量子状態は Spin 1/2 系の純粋状態であることが既知であるとの仮定の下で，どの純粋状態であるか推定するために最適な測定方法とその最適測定の誤差について考察する．表現空間の次元が有限であるときには本稿と同様の結果が得られるが，具体性を持たせるために，Spin 1/2 系に限定して話を進める．本稿の目的は参考文献[1]で得られた結果を解説することにある．ただ，参考文献[1]で用いられている記号と本稿で用いられている記号が若干異なるので参照の際には注意を要する．なお，本稿で紹介する結果の特別な場合については，部分的に文献[23]により既に得られている．

本稿では未知状態の独立かつ同一なサンプルが複数準備されたと仮定し，それらのサンプルに対して，量子測定を行って未知状態を推定する問題を扱う．最初に，各サンプル間の量子相関を用いる量子測定を考え，その範囲で推定量(推定方法)に関する最適化を行う．そのために，§2 で問題の数学的定式化について議論する．さらに §3 でこの数学的問題を解決するために有効な Holevo により定式化された量子版 Hunt-Stein の定理を紹介する[5,13]．そして §4 で §3 の理論を §2 に適用することによって，最適測定(最適推定)を構成し，その最適測定に関する漸近誤差について議論する．次に，§5 では量子測定について各サンプル間の量子相関を許さない範囲で考え，前者の最適測定とどの程度誤差の開きがあるか考察する．

2 問題の数学的定式化

2.1 量子測定

最初に一般のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の量子測定の数学的定式化について述べる．従って，測定について議論することになるが，本稿では，測定器のダイナミックスや物理的構

造よりも，測定値の確率分布に注目する．その理由は，我々は未知の状態を“知る”ために測定を行うからである．基本的に測定後の量子状態については本稿では議論しない．それゆえ，量子測定を測定値を得るための行為として捕えると，測定器は Black Box とみなすことができ，次のように表すことが出来る．

$$\begin{array}{ccccc} \text{Input} & & \text{Black Box} & & \text{Output} \\ \rho & \mapsto & M & \mapsto & \hat{\theta} \\ \text{状態} & & \text{測定器} & & \text{測定値} \end{array}$$

従って，Input である量子状態 ρ と Black Box である測定器 M のみに依存して Output である測定値 $\hat{\theta}$ の確率分布 P_M^ρ が決まる．

例えば，いわゆる物理量 $X = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle\langle e_i|$ (縮退は無いと仮定する．) の測定 E_X を状態 ρ に行うと，次のような確率分布が得られる．

$$P_{E_X}^\rho(\{\alpha_i\}) = \mathrm{tr}\,\rho |e_i\rangle\langle e_i|.$$

一般に物理量 X のスペクトル分解を E'_X で表すと物理量 X の測定 E_X を状態 ρ に対して行ったときに得られる確率分布は次のように表すことが出来る．

$$P_{E_X}^\rho(\,d\hat{\theta}) = \mathrm{tr}\,\rho E'_X(\,d\hat{\theta}).$$

確率分布 $P_{E_X}^\rho$ のみに注目するのであれば，測定 E_X に関しては スペクトル分解 E'_X が分っていれば十分であるので，両者は同一視でき E_X で表わすことにする．一般にスペクトル分解 E_X は次のような性質を満たす．

(1) 任意の (Borel) 集合 $B \subset \mathbf{R}$ に対して，$E_X(B)$ は射影 (Projection) であり，

(2) $E_X(\emptyset) = 0, E_X(\mathbf{R}) = \mathrm{Id}$ となる．

(3) さらに，互いに粗な加算個の $\mathbf{R}$ の (Borel) 部分集合 $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ に対して，$\sum_{i=1}^\infty E_X(B_i) = E_X(\cup_{i=1}^\infty B_i)$ となる．

各 $E_X(B)$ が射影 (projection) となることから，上記の条件を満たす E_X を測定値集合を $\mathbf{R}$ に持つ射影値測度 (projection valued measure) と呼ぶ．単純測定 (simple measurement) と呼ばれることもある[2]．

上の条件の中の $\mathbf{R}$ を一般の測定値集合 Ω (例えば，Spin 1/2 系の純粋状態全体など) に置き換えると，測定値集合を Ω に持つ射影値測度の定義になる．

1970 年頃までは，一般に量子測定は上記の射影値測度で書き表されるものとの考えが一般的であったが，1970 年になって Davis and Lewis により，量子測定を射影値測度より一般的な一般化測定[3]で考えるべきではとの提案がなされた [3]．一般化測定の定義は先の条件 (1) の射影という条件を非負定値な Hermite 演算子に条件を緩めることにより得られる．

[2] 単純測定という名称は次に導入する一般化測定に対する名称である．

[3] 英語では generalized measuremnet または positive operator valued measure と書かれ，POM や POVM と省略される．

一般化測定であって，単純測定でないものの例は単純測定の凸結合を考えると構成できる．単純測定の凸結合で表される一般化測定はランダム測定と呼ばれ，異なる単純測定をある確率で行えば実現できる．

その他，量子光学で重要な役割を果たすヘテロダイン検波器は，単純測定に含まれない重要な例の1つである．ヘテロダイン検波器は熱ノイズ中のコヒーレント光の複素振幅の推定に関しては最適測定になることが知られている[5,6].

その後，Holevoにより，一般化測定に対する次のような物理的意味付けがなされた．Neumark拡張と呼ばれるもので，任意の一般化測定は射影値測度で表すことが可能であるとの主張である[5,7,14,16].

定理 1 測定値集合を Ω に持つ量子系 $\mathcal{H}$ 上の任意の一般化測定 M に対して適当な量子系 $\mathcal{H}'$ と $\mathcal{H}'$ 上の状態 σ と測定値集合を Ω に持つ $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$ 上の射影値測度 E が存在して次の条件を満たす.

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\,\rho M(d\omega) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'}(\rho\otimes\sigma)E(d\omega). \tag{1}$$

この定理は式(1)の条件を満たす $(\mathcal{H}',\sigma,E)$ の3つ組が存在することを主張しているが，具体的に $(\mathcal{H}',\sigma,E)$ の3つ組を構成する一般的手法は見つかっていない．わずかな具体例でしか上記のNeumark拡張は構成されていない．例えば，先に述べたヘテロダイン検波器はそのNeumark拡張が構成されている数少ない例の1つである[5]．また坂口により Q と P^{-1} の同時測定のNeumark拡張が構成されている[20].

ただ，Neumark拡張 $(\mathcal{H}',\sigma,E)$ の構成がすぐにその一般化測定の物理的実現につながらないことに注意を要する．測定器の物理的実現にはそのダイナミックスを考える必要がある．逆に，実際に実現できる測定による測定値の確率分布は，一般化測定で表されることが知られている[5]．従って，今後，量子状態の推定を考える際には最初に，一般化測定の範囲で最適化を行い(§4)，その次に，最適な一般化測定の物理的実現について若干の考察を加える(§5)．今後，本稿では測定値集合を Ω に持つ量子系 $\mathcal{H}$ 上の一般化測定の集合を $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{H})$ で表すことにする．なお，この小節の内容に関するより詳しい解説として，参考文献[21]の§1,§2がある．

2.2 量子 i.i.d. 条件

§1でも述べたように，本稿では，未知の量子状態はSpin 1/2系の純粋状態であることが仮定されているので，測定値集合がSpin 1/2系の純粋状態全体($\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$で表す)になる一般化測定を考え，その中で最適化を行うことにする．ただし，本稿では純粋状態についても密度演算子(1次元射影)で考えることにする．

まず最初に n 個のサンプルがどのように表されるか考えることにする．未知の量子状態 ρ のサンプルが n 個独立に準備されると，量子系は次のように記述される[12].

$$\mathcal{H}^{(n)} := \underbrace{\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^2}_{n}.$$

さらに量子状態は次のように記述される.

$$\rho^{(n)} := \underbrace{\rho \otimes \cdots \otimes \rho}_{n} \text{ on } \mathcal{H}^{(n)}.$$

従って，量子状態のファミリー $\{\rho^{(n)}|\rho \in \mathcal{P}(\mathbf{C}^2)\}$ のパラメータ ρ を推定する問題となる. ちなみに，この条件は古典統計学の独立同一分布条件 (i.i.d. 条件) の量子力学的対応になり，量子 i.i.d. 条件と呼ばれる.

ここで，我々は n 個のサンプルに対してあらゆる測定手段を考慮にいれるため，測定値集合が $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ になるテンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の一般化測定を考える．この中には，各サンプルに対して逐次測定を行い全測定終了後に測定値のデータに統計的処理を加えて推定するという操作も含まれる．また，逐次に各サンプルを測定し，その際これまでの測定結果を考慮にいれて新たな測定を行う場合も含まれている．さらに，各サンプル間の量子相関を用いた測定も考慮に入れられている.

一方で，各 $\rho^{(n)}$ はテンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の状態であるが，対称テンソル空間 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ 上の状態と考えることもできる．従って，以下のように測定値集合が $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ になるテンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の任意の一般化測定 M と以下に定義する測定値集合が $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ になる対称テンソル空間 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ 上の一般化測定 M_s は量子状態がファミリー $\{\rho^{(n)}|\rho \in \mathcal{P}(\mathbf{C}^2)\}$ に含まれるときは，同じ確率分布を実現する．その M_s は $M_s(B) := P_s M(B) P_s (B \subset \mathcal{P}(\mathbf{C}^2))$ で与えられる．ただし，テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ から 対称テンソル空間 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ への射影を P_s で表した.

従って，測定値集合が $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ になる対称テンソル空間 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ 上の任意の一般化測定の中で最適化を行うとよい.

2.3 ミニマックス法とベイズ法

次に最適化のための誤差評価の方法を議論する．まず最初に $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ に次のように距離を定義する.

定義 1 *Fubini-Study* の距離 d_{fs} を次のように定義する:

$$\cos d_{fs}(\rho,\hat{\rho}) = \sqrt{\operatorname{tr}\rho\hat{\rho}}\ ,\ 0 \le d_{fs}(\rho,\hat{\rho}) \le \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

さらに *Bure* の距離 d_b を次のように定義する:

$$d_b(\rho,\hat{\rho}) := \sqrt{1-\operatorname{tr}\rho\hat{\rho}}. \tag{3}$$

ここで，未知状態 ρ に対して測定値 $\hat{\rho}$ を得たときの誤差を $W(\rho,\hat{\rho})$ で表わし，誤差関数と呼ぶ．よく用いられる誤差関数としては先に定義した距離の2乗が挙げられる.

補題 1 誤差関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ に関して以下は同値である.

- $W(\rho,\hat{\rho}) = W(g\rho g^*, g\hat{\rho}g^*)\ \forall g \in \mathrm{SU}(2), \forall\rho, \forall\hat{\rho} \in \mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$.
- $W(\rho,\hat{\rho}) = h \circ d_{fs}(\rho,\hat{\rho})$ となる $[0,1]$ 上の関数 h が存在する.

さらに，誤差関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ が Fubini-Study の距離 d_{fs}に関して単調増加との自然な要請を課すことにする．未知の量子状態が ρ であるとき測定 $\Pi\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{H}^{(n)})$ を行って推定したときの誤差関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ の下での平均誤差は次で与えられる．

$$\mathcal{D}_{\rho}^{W,(n)}(\Pi):=\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)}W(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi(\,d\hat{\rho})\rho^{(n)}). \tag{4}$$

本稿ではミニマックス法とベイズ法を取り上げる．まずミニマックス法では，次に定義する最大誤差 $\mathcal{D}^{W,(n)}(\Pi)$ を最小化する．

$$\mathcal{D}^{W,(n)}(\Pi):=\max_{\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)}\mathcal{D}_{\rho}^{W}(\Pi). \tag{5}$$

さらに，ベイズ法では $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ の事前分布(prior) $\nu(\,d\rho)$ の下で次の値を最小化する．

$$\mathcal{D}_{\nu}^{W,(n)}(\Pi):=\int_{\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)}\mathcal{D}_{\rho}^{W}(\Pi)\nu(\,d\rho).$$

これらの問題について解を得るため，次節で量子版 Hunt-Stein の定理を概説する．

3 量子版 Hunt-Stein の定理

この節では，Holevo により定式化された量子版 Hunt-Stein の定理を紹介する [5,13]．群作用に関してある種の共変性を満たす場合，先に述べたベイズ法及びミニマックス法の解がどのような形で得られるか概説する．まず G を コンパクトなパラメトリック空間 Θ に推移的に作用するコンパクト Lie 群とし，$\{V_g\}$ を 有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}:=\mathbf{C}^k$ 上の G の連続既約ユニタリ表現とする．さらに，μ を全測度が 1 になる G 上の不変測度とする．今後，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で量子系 $\mathcal{H}$ 上の混合状態全体の集合を$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ で純粋状態全体の集合を表わすことにする．この節で証明を省略した所については参考文献[5,13]を参照のこと．

定義 2 一般化測定 $\Pi\in\mathcal{M}(\Theta,\mathcal{H})$ が次の条件を満たすとき表現に関して $\{V_g\}$ 共変的であるという．任意の $g\in G$ と任意の *Borel* 集合 $B\subset\Theta$ に対して，

$$V_g^*\Pi(B)V_g=\Pi(B_{g^{-1}})$$

ただし，

$$B_g:=\{g\theta|\theta\in B\}.$$

今後 $\mathcal{M}(\Theta,V)$ で表現 $\{V_g\}$ に関して共変的な測定の集合を表す．

定理 2 任意の $\theta\in\Theta$ に対して,次に定義する写像 $V^\theta:\mathcal{S}(\mathcal{H})\rightarrow\mathcal{M}(\Theta,V)$ は全射になる．ここで，任意の $P\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して，$V^\theta(P)$ は次のように与えられる．

$$V^\theta(P)(B):=k\int_{\{g\theta\in B\}}V_gPV_g^*\mu(\,dg)$$

ただし， B は任意の *Borel* 集合．

さらに パラメトリック空間 Θ でパラメトライズされたファミリー $\{S_\theta|\theta\in\Theta\}$ を考える.

定義 3 ファミリー $\{S_\theta|\theta\in\Theta\}$ が次の条件を満たすときΘ に作用する群 G の表現 $\{V_g\}$ に関して共変的であると言う.

$$S_{g\theta}=V_g S_\theta V_g^* \ ,\ \forall g\in G,\forall\theta\in\Theta.$$

以下では，未知状態がファミリー $\{S_\theta\}$ に含まれていることが既知であるとして出来るだけ正確に真のパラメータを推定する問題を考える．この問題を数学的に厳密に扱うために，若干の数学的準備をする．

最初に，真のパラメータ θ のときに，測定値 $\hat{\theta}$ を得たときの推定誤差を $W(\theta,\hat{\theta})$ で表わし，誤差関数と呼ぶ．

そして，その誤差関数 $W(\theta,\hat{\theta})$ に以下の自然な不変性を要請する．

$$W(\theta,\hat{\theta})=W(g\theta,g\hat{\theta})\ \forall g\in G,\forall\theta,\forall\hat{\theta}\in\Theta. \tag{6}$$

真の状態が S_θ であるとき，測定 $\Pi\in\mathcal{M}(\Theta,\mathcal{H})$ を行ったときの誤差関数 $W(\theta,\hat{\theta})$ に関する平均誤差は以下で与えられる．

$$\mathcal{D}_\theta^{W,S}(\Pi):=\int_\Theta W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{tr}(\Pi(d\hat{\theta})S_\theta).$$

ここで，§2.3 で取り上げたミニマックス法とベイズ法をより一般的な枠組みで考える．ベイズ法では，Θ の事前分布 (prior) $\nu(d\theta)$ を仮定し，以下に定義する量を最小化する測定 Π を捜す．

$$\mathcal{D}_\nu^{W,S}(\Pi):=\int_\Theta \mathcal{D}_\theta^{W,S}(\Pi)\nu(d\theta).$$

さらに，事前分布 $\nu(d\theta)$ に群 G の作用に不変との自然な仮定を課す．以後 $\nu(d\theta)$ は群 G の作用に関して不変とする．

一方，ミニマックス法では，次に定義する誤差関数 $W(\theta,\hat{\theta})$ に関する最大誤差を最小化する測定 Π を捜す．

$$\mathcal{D}^{W,S}(\Pi):=\max_{\theta\in\Theta}\mathcal{D}_\theta^{W,S}(\Pi).$$

ここで，事前分布に群の作用に関する不変性を課したときのベイズ法とミニマックス法では同一の共変測定により最適値が実現されることを示す．このために，任意の測定 $\Pi\in\mathcal{M}(\Theta,\mathcal{H})$ に対して，測定 $\Pi_g\in\mathcal{M}(\Theta,\mathcal{H})$ を次のように定義する．任意の Borel 集合 $B\in\Theta$ に対して，

$$\Pi_g(B):=V_g\Pi(B_g)V_g^*.$$

続いて，平均測定 $\bar{\Pi}$ を次のように与える．

$$\bar{\Pi}(B):=\int_G \Pi_{g^{-1}}(B)\mu(dg).$$

すると，

$$\mathcal{D}_\nu^{W,S}(\bar{\Pi}) = \int_G \mathcal{D}_\nu^{W,S}(\Pi_{g^{-1}})\mu(dg) = \mathcal{D}_\nu^{W,S}(\Pi).$$

従って，

$$\mathcal{D}^{W,S}(\Pi) \geq \mathcal{D}_\nu^{W,S}(\Pi) = \mathcal{D}_\nu^{W,S}(\bar{\Pi}).$$

ミニマックス法及び群作用不変な仮定の下でのベイズ法の解は共変測定で得られることが分る．しかも次の量子版 Hunt-Stein の定理より，両者の解が一致する．

定理 3 任意の共変測定 $\Pi \in \mathcal{M}(\Theta, V)$ に対して，次の等式を得る．

$$\mathcal{D}_\theta^{W,S}(\Pi) = \mathcal{D}_\nu^{W,S}(\Pi) = \mathcal{D}^{W,S}(\Pi).$$

従って，次の量を最小化すればよい．

$$\mathcal{D}_\theta^{W,S} \circ V^\theta(P) = k\int_G W(\theta, g\theta)\,\mathrm{tr}\, S_\theta V_g P V_g^* \mu(dg) = \mathrm{tr}\, \hat{W}(\theta)P,$$

ただし，

$$\begin{aligned}\hat{W}(\theta) &:= k\int_G W(\theta, g\theta)V_g^* S_\theta V_g \mu(dg) \\ &= k\int_\Theta W(\theta, \hat{\theta})S_{\hat{\theta}}\nu(d\hat{\theta}).\end{aligned}$$

結局ベイズ法及びミニマックス法は以下の量の最小化問題に帰着する．

$$\min_{P\in\mathcal{S}(\mathcal{H})} \mathrm{tr}\, \hat{W}(\theta)P = \min_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{H})} \mathrm{tr}\, \hat{W}(\theta)P.$$

4 最適測定

この節では §3 の理論を §2の問題に次のようにして適用する．

$$\Theta := \mathcal{P}(\mathbf{C}^2),\ \mathcal{H} := \mathcal{H}_s^{(n)},\ G := \mathrm{SU}(2),\ S_\rho := \rho^{(n)}.$$

さらに，$\{V_g\}$ を群 $G = \mathrm{SU}(2)$ の対称テンソル空間 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ への自然な表現とする．この場合 $\mathcal{H}_s^{(n)}$ の次元は $n+1$ となる．

定理 4 誤差関数 $W(\rho, \hat{\rho})$ が *Fubini-Study* の距離に関して単調増加であるとき，

$$\min_{P_0\in\mathcal{P}(\mathcal{H}_s^{(n)})} \mathrm{tr}\, \hat{W}(\rho)P_0 = \mathrm{tr}\, \hat{W}(\rho)\rho^{(n)}$$

となる．

証明は[1]を参照のこと．誤差関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ が定理 4 の仮定を満たすとき，$V^{\rho}(\rho^{(n)})$ は事前分布が SU(2) 不変なベイズ法及びミニマックス法に関して最適測定になる(V^{ρ} の定義については定理 2 を参照．)．$V^{\rho_0}(\rho_0^{(n)})=V^{\rho}(\rho^{(n)})$ であるから，この最適測定は ρ や W に依存しない．この最適測定を Π_n で表し，以下のように表すことが出来る．

$$\Pi_n(d\hat{\rho}) := (n+1)\hat{\rho}^{(n)}\nu(d\hat{\rho}). \tag{7}$$

最適測定は次のように表すことができる．

$$\Pi_n(d\rho) = (n+1)|\phi(\theta)^{(n)}\rangle\langle\phi(\theta)^{(n)}|\nu(d\theta) \tag{8}$$

ただし，

$$\phi(\theta) \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ e^{i\theta_2}\sin\theta_1 \end{pmatrix},\ \theta=(\theta_1,\theta_2), 0\le\theta_1\le 2\pi, 0\le\theta_2\le\pi/2 \tag{9}$$

とする．不変測度 $\nu(d\theta)$ は (9) の座標系では以下のように与えられる．

$$\nu(d\theta) = \frac{1}{\pi}\sin\theta_1\cos\theta_1\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

さらに，$W(\rho,\hat{\rho}) = h\circ d_{fs}(\rho,\hat{\rho})$ とすると，

$$\mathcal{D}^{W,(n)}(\Pi_n) = 2(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta)\cos^{2n+1}\theta\sin\theta\, d\theta$$

が得られる．証明は[1] を参照のこと．誤差関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ が Bure の距離 $d_b(\rho,\hat{\rho})$ の2乗のときについて考えると最適測定について次の式を得る．

$$\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} d_b^2(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi_n(d\hat{\rho})\rho^{(n)}) = \frac{n}{n+1} \tag{10}$$

証明に付いては[1]を参照のこと．

さらに，平均2乗誤差の漸近的評価について考える．この場合，距離については，Bure の距離 $d_b(\rho,\hat{\rho})$ Fubini-Study の距離 $d_{fs}(\rho,\hat{\rho})$ 両方について考察する．式 (10) を用いると，最適測定に関して次の式を得る．導出に関する細かい議論は[1]を参照のこと．また，式 (5)(4) 及び，定義 1 を参照のこと．

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{D}^{d_b^2,(n)}(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty}\max_{\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} n\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} d_b^2(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi_n(d\hat{\rho})\rho^{(n)}) \;=\; 1 \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{D}^{d_{fs}^2,(n)}(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty}\max_{\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} n\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} d_{fs}^2(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi_n(d\hat{\rho})\rho^{(n)}) \;=\; 1. \tag{12}$$

同様に，最適測定に関して次の大偏差型の式を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathrm{Pr}_{\Pi_n}^{\rho^{(n)}}\{\hat{\rho}\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)|d_{fs}(\rho,\hat{\rho})\ge\epsilon\} \;=\; 2\log\cos\epsilon \tag{13}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log\mathrm{Pr}_{\Pi_n}^{\rho^{(n)}}\{\hat{\rho}\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)|d_{fs}(\rho,\hat{\rho})\ge\epsilon\} \;=\; -1, \tag{14}$$

ただし，Pr_M^S で状態 S に対して測定 M を行ったときに得られる確率分布を表すことにする．証明は[1]を参照のこと．

5 量子相関を許さない測定

これまでは，複数のサンプルに1つの測定を行ったときの最適測定に付いて考えていたが，次に，各サンプルに同一の測定を行って，その後統計的処理を行う場合について考える．これは各サンプル間の量子相関を全く使わない測定に限ることになり，前者の場合と比べると，誤差は大きくなる．この節では，量子相関を許さない測定に限ったとき，式(12)(14)と同様の誤差評価を行うと，§4 の最適測定と比べてどの程度の誤差が実現できるか考察する．

5.1 数学的構成

多変数のパラメータを持つ確率分布のファミリーについて考えると，一次の漸近論に関する次の補題が成立する．

補題 2 $\{p_\theta|\theta \in \Theta\}$ 確率分布のファミリーとする．$\{T^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が一致推定量であるとするとき，次の不等式が成立．

$$\lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n} d_J^2(T^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\theta)p_\theta(dx_1)p_\theta(dx_2)\cdots p_\theta(dx_n) \;\geq\; \dim\Theta \quad (15)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log p_\theta\{d_J(T^{(n)},\theta)\geq\epsilon\} \;\geq\; -\frac{1}{2} \quad (16)$$

ただし，J は $\{p_\theta|\theta\in\Theta\}$ の *Fisher* 計量を表し，d_g は *Riemann* 計量 g の測地的距離を表す．また $\{T^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が次の条件を満たすとき一致推定量であるという．

$$p_\theta\{d_J(T^{(n)},\theta)\geq\epsilon\}\to 0 \;as\; n\to\infty,\ \forall\theta\in\Theta,\forall\epsilon>0.$$

$T^{(n)}$ が最尤推定量のとき，上の2つの不等式で同時に等号が成立する．

次に，確率分布のファミリー$\{\mathrm{tr}\,\Pi_1(d\hat{\rho})\rho|\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)\}$ に話題を移す．J_{Π_1} を確率分布のファミリー$\{\mathrm{tr}\,\Pi_1(d\hat{\rho})\rho|\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)\}$ の Fisher 計量とすると

$$d_{J_{\Pi_1}} = \sqrt{2}d_{fs} \quad (17)$$

が得られる．この式の証明は[1]を参照のこと．

ここで，測定 $\underbrace{\Pi_1\otimes\Pi_1\otimes\cdots\otimes\Pi_1}_{n}$ から得られる n 個のデータに対して最尤推定を行うという量子系 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の測定を考え，このような測定を $T_{(n)}$ で表わすことにする．$T_{(n)}$ の定義に注意して，補題 2と式(17)を用いると，測定 $T_{(n)}$ に対して次の等式を得る．

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{D}^{d_{fs}^2,(n)}(T_{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\max_{\rho\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} n\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} d_{fs}^2(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(T_{(n)}(d\hat{\rho})\rho^{(n)}) \;=\; 1 \quad (18)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log \mathrm{Pr}_{T_{(n)}}^{\rho^{(n)}}\{\hat{\rho}\in\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)|d_{fs}(\rho,\hat{\rho})\geq\epsilon\} \;=\; -1. \quad (19)$$

式(12)(14)と上記の結果を比較すると，平均2乗誤差，大偏差型評価双方の意味で，測定 $T_{(n)}$ は最適測定 Π_n と漸近的に同程度の性能を有することがわかる．

5.2 物理的構成

最後に $T_{(n)}$ の物理的実現について考える．そのためには Π_1 を物理的に実現することを考えればよい．Π_1 は実はランダム測定 (§2.1 を参照) であることがわかる．まず測定値集合を $\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$ に持つ単純測定 $E_\theta(\theta=(\theta_1,\theta_2)|0\le\theta_1\le 2\pi, 0\le\theta_2\le\pi/2)$ を次のように構成する．

$$\begin{aligned} E_\theta\Big(\Big\{|\phi(\theta)\rangle\langle\phi(\theta)|\Big\}\Big) &= |\phi(\theta)\rangle\langle\phi(\theta)| \\ E_\theta\Big(\Big\{|\phi(\theta^\perp)\rangle\langle\phi(\theta^\perp)|\Big\}\Big) &= |\phi(\theta^\perp)\rangle\langle\phi(\theta^\perp)|. \end{aligned}$$

ただし，$\theta^\perp$ は $\langle\phi(\theta)|\phi(\theta^\perp)\rangle=0$ となるように定義する．今定義した E_θ は角度 θ 方向の Stern-Gerlach 型の測定を行うと得られる．さらに，Π_1 は次の式でランダム測定として与えられることが容易にわかる．

$$\Pi_1=\int_{\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)} E_\theta \frac{1}{\pi}\sin\theta_1\cos\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

すなわち，測定 Π_1 は角度 θ 方向の Stern-Gerlach 型の測定を重み $\frac{1}{\pi}\sin\theta_1\cos\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2$ で行えばよい．このような ランダム測定の物理的実現は容易であると思われる．この小節で議論された測定 E_θ と Stern-Gerlach 型の測定との対応に付いては [21] の§3 においてより詳しく議論されている．

6 結論

Spin 1/2 系の純粋状態全体からなるファミリーに対する状態推定について，量子相関を許す場合と許さない場合とについて比較した．前者範囲でのの最適測定は式 (7)(8) で与えられる，Π_n であることが分った．一方，後者の範囲では，測定 $T_{(n)}$ が存在し，測定 $T_{(n)}$ は式 (19)(19) に見られるように，漸近的に平均 2 乗誤差，大偏差型双方の意味で，前者の最適測定 Π_n と同じ精度を実現することが分った．しかも，§5.2 でも議論したように，測定 $T_{(n)}$ の物理的構成は容易であることから，漸近的に最適値を実現する測定の構成は容易である．

一方，サンプル数 $n(>1)$ が有限のときについては事情が異なる．サンプル数 $n(>1)$ が有限ときは，確実に，前者の最適測定 Π_n の方が，測定 $T_{(n)}$ よりも小さい誤差を実現する．しかしながら，最適測定 Π_n の物理的構成については，難しいと思われる．基本的にサンプル数 $n(>1)$ が十分大きくないときについては，漸近的理論は使えない．従って，そのような場合のことを考えると，最適測定 Π_n を物理的に実現することは，重要な研究課題になると思われる．

さらに，この種の比較を混合状態からなるファミリーに対して行う必要がある．おそらく，混合状態では漸近的にも両者は一致しないと思われる．

なお，量子系の表現空間が有限の場合，本稿と同様の結果が得られる．参考文献 [1] を参照のこと．

謝辞

本研究に関して有益な助言を大阪大学の藤原彰夫先生及び東京大学の松本啓史先生から頂き感謝致します．また，電気通信大学の長岡浩司先生には，本研究に不可欠な重要文献を多数送って頂き感謝致します．さらに，量子計算研究会(関西及び関東)の皆様からは，本研究をまとめるにあたって，非常に参考になる助言を多数頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Hayashi, “Asymptotic estimation theory for a finite dimensional pure state model Kyoto-Math 97-09;Los Alamos/e-print/quant-ph/9704041 (1997).

[2] A. S. Holevo, “The Capacity of Quantum Channel with General Signal States,” Los Alamos/e-print/quant-ph/9611023 (1996).

[3] E. B. Davis and J. T. Lewis “An operational approach to quantum probability,” *Com. Math. Phys.,* vol. 17, pp.239-259 (1970).

[4] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory,* (Academic Press, New York, 1976).

[5] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory,* (North_Holland, Amsterdam, 1982).

[6] H. P. Yuen and M. Lax, “Multiple-parameter quantum estimation and measurement of nonselfadjoint observables,” *IEEE trans.,* IT-19, pp740-750 (1973).

[7] M. A. Neumark, “On a representation of additive operator set functions,” *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sience de l"URSS,* vol. 41, No. 9, pp. 359-361, (1943).

[8] M. Hayashi, “A Linear Programming Approach to Attainable Cramér-Rao type Bounds,” in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by O. Hirota, A. S. Holevo, and C. M. Caves, (Plenum Publishing, 1997) to appear .

[9] 長岡 浩司, “エルミート行列の同時対角化のある一般化とその量子推定理論との関係について,” 日本応用数理学会論文誌, vol.1, No.4, pp.305-318, (1991).

[10] A. Fujiwara and H. Nagaoka, in *Quantum coherence and decoherence*, edited by K. Fujikawa and Y. A. Ono, (Elsevier, Amsterdam, 1996), pp. 303.

[11] K. Matsumoto, “A new approach to the Cramér-Rao type bound of the pure state model,” METR 96-09,(1996).

[12] 長岡 浩司, "量子状態推定の漸近理論について," 京都大学数理解析研究所講究録, vol 879, pp.155-171, (1994).

[13] A. S. Holevo, "Covariant measurement and uncertainly relations," *Rep. Math. Phys.,* vol.12, pp.251-271,(1977).

[14] M. Ozawa, "Quantum meaasuring processes of countinuous observables," *Jour. Math. Phys.,* vol 25, pp.79-87, (1984).

[15] G. W. Mackey, "Imprimitivity for representations of locally compact groups I," *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* vol. 35, pp.537-545,(1949).

[16] P. Busch, M. Grabowski, and P. J. Lahti, *Operational Quantum Physics,* Lecture Notes in Physics vol. m 31, (Springer, Berlin, 1995).

[17] G. M. D'Ariano and H. P. Yuen, "Impossibility of measuring the wave function of a single quantum system," *Phys. Rev. Lett* 76, pp. 2832-2835, (1996).

[18] G. M. D'Ariano, "Homodyning as universal detection," in in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by O. Hirota, A. S. Holevo, and C. M. Caves, (Plenum Publishing, 1997) to appear ;Los Alamos/e-print/quant-ph/9701011 (1997).

[19] G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi, "Reconstructing the density operator by using generalized field quadratures," to apper in *Quantum and Semiclassical Optics* . ;Los Alamos/e-print/quant-ph/9606034 (1996).

[20] 坂口 文則, "量子力学からみたウェーブレット," "量子情報と進化の力学:研究最前線" (大矢雅則・小嶋泉 編), 牧野書店, 第2部(応用編)第5章,pp.177-196,(1996).

[21] 藤原 彰夫, "量子推定理論入門," "現代数学序説 (II) "(川久保勝夫, 宮西正宜 編), 大阪大学出版会, 近刊.

[22] 広田 修, "光通信理論," 森北出版, (1985).

[23] S. Massar and S. Popescu, "Optimal Extraction of Information from Finite Quantum Ensembles," *Phys. Rev. Lett* 74, pp. 1259-1263, (1995).